ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ με $a_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, \dots, n\}$
και $a_n \neq 0$, έχει ακριβώς n-μιγαδικές ρίζες.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f: M^m \to N^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ δύο πολυπτυγμάτων

α) Σημεία $p \in M^m$, όταν $\operatorname{rank} df_p < \dim N^n$ λέγονται κρίσιμα σημεία. Όλα τα υπόλοιπα λέγονται κανονικά σημεία

β) Ένα σημείο $q \in N^n$ έτσι ώστε $f^{-1}(q)$ περιέχει τουλάχιστον ένα κρίσιμο σημείο της f, λέγεται κρίσιμη τιμή. Όλα τα υπόλοιπα λέγονται κανονικές τιμές. Δηλαδή:

$M^m = \{$κρίσιμων σημείων$\} \cup \{$κανονικών σημείων$\}$

$N^n = \{$κρίσιμες τιμές$\} \cup \{$κανονικές τιμές$\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: M^m \to N^n$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση και

$m = \dim M^m \geq \dim N^n = n$.

Εάν $q \in N^n$ είναι κανονική τιμή, τότε το $f^{-1}(q)$ είναι διαφορίσιμο πολύπτυγμα διάστασης $m-n$

Θα χρειαστούμε και κάποιες έννοιες από την τοπολογία.

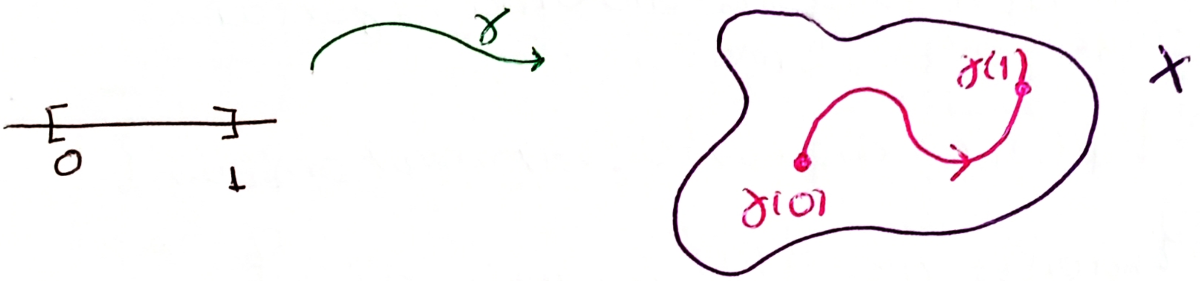
ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τοπολογικός χώρος X, ονομάζεται συνεκτικός (connected), όταν ο X, δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο μη κενών και ξένων μεταξύ τους, ανοικτών υποσυνόλων. Δηλαδή, $\nexists$ ανοικτά A και B έτσι ώστε $X = A \cup B$, με $A \cap B = \emptyset$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας δρόμος, ενός ενός τοπολογικού χώρου X, είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [0,1] \to X$.

Το $\gamma(0)$ λέγεται αρχή και το $\gamma(1)$ λέγεται πέρας



ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται δρομοσυνεκτικός (path-connected), όταν δύο οποιαδήποτε σημεία του χώρου είναι συνδέσιμα μέσω ενός δρόμου.

δρομοσυνεκτικός χώρος

∄ δρόμος που να μπορώ να τα ενώσω. Επομένως, αυτός ο χώρος δεν είναι δρομοσυνεκτικός.

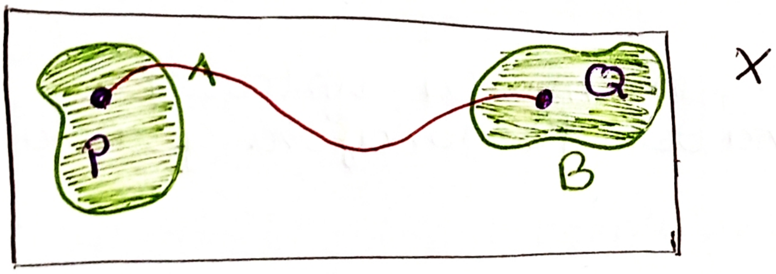
ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος είναι και συνεκτικός.

Το αντίστροφο, δεν ισχύει πάντα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι X είναι δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος. Ας υποθέσουμε σε αντίθεση, ότι ο X δεν είναι συνεκτικός.



Από την υπόθεση $\exists$, δρόμος $\gamma:[0,1]\to\gamma$ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma(1)=Q$.

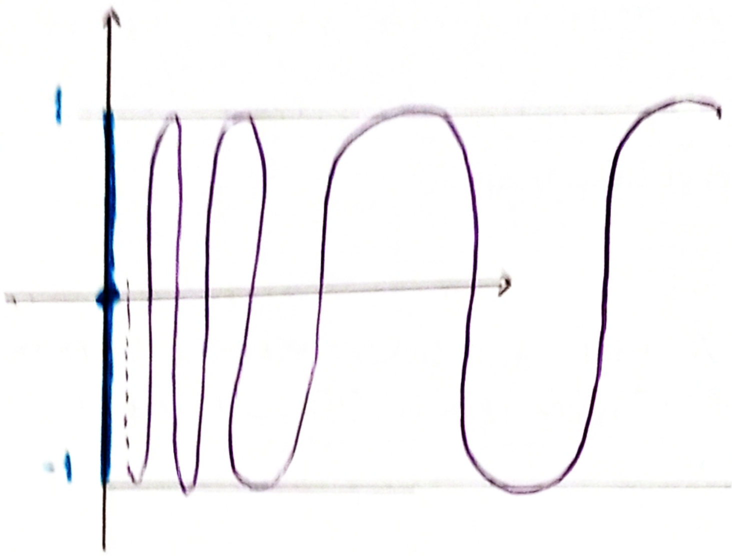
Αφού υπέθεσα, ότι X όχι συνεκτικός, $\exists\ A\neq\emptyset, B\neq\emptyset$ με $A\cap B=\emptyset$ και $X=A\cup B$. Ας υποθέσουμε ότι $p\in A$ και $Q\in B$. Τότε, επειδή γ συνεχής, $\gamma^{-1}(A)$ και $\gamma^{-1}(B)$ ανοικτά. Επιπλέον, $\gamma^{-1}(A)\neq\emptyset$ (επειδή $0\in\gamma^{-1}(A)$), $\gamma^{-1}(B)\neq\emptyset$ (επειδή $1\in\gamma^{-1}(B)$) και $\gamma^{-1}(A)\cap\gamma^{-1}(B)=\emptyset$ και $\gamma^{-1}(A)\cup\gamma^{-1}(B)=[0,1]$

Αυτό σημαίνει, ότι το $[0,1]$ δεν είναι συνεκτικό. Άτοπο.

Παρατήρηση

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι το εξής:

$$X = \{\underbrace{(x, \sin(\log x)) \in \mathbb{R}^2 : x>0}_{A}\} \cup \underbrace{\{0\} \times [-1, 1]}_{B}$$



Η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin(\cos x)$ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε, τον άξονα y, αλλά δεν τον ακουμπάει.

α) Τα σύνολα Α και Β δεν ενώνονται με καμπύλη. Άρα X όχι δρομοσυνεκτικός.

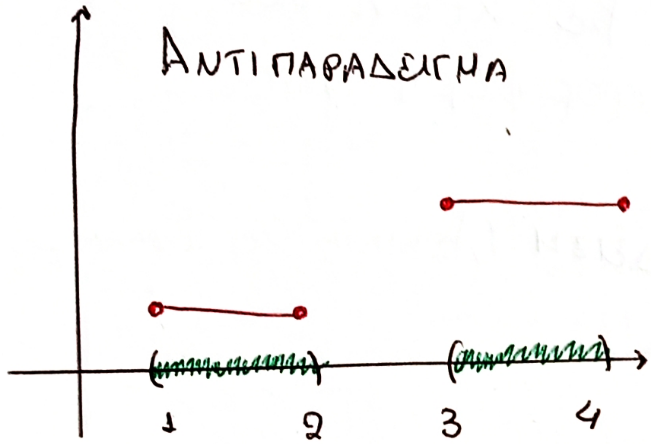
β) Το σύνολο X, δεν γράφεται ως ένωση δύο ξένων και ανοικτών συνόλων. Επομένως, X συνεκτικός.

ΘΕΩΡΗΜΑ
Έστω M^m ένα συνεκτικό πολύπτυγμα. Τότε το M^m είναι και δρομοσυνεκτικό. (οπότε οι δύο έννοιες ταυτίζονται στη διαφορική γεωμετρία)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΑΣΚΗΣΗ ΣΕ ΦΥΛΛΑΔΙΟ)

ΘΕΩΡΗΜΑ
~~Ας~~ Έστω X, ένας συνεκτικός τοπολογικός χώρος και $f: X \to \mathbb{R}$ μια τοπικά σταθερή συνάρτηση: δηλαδή για κάθε $x \in X$ $\exists$ περιοχή $U_x \subseteq X$ ώστε η $f|U_x$ να είναι σταθερή, τότε η f είναι σταθερή.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



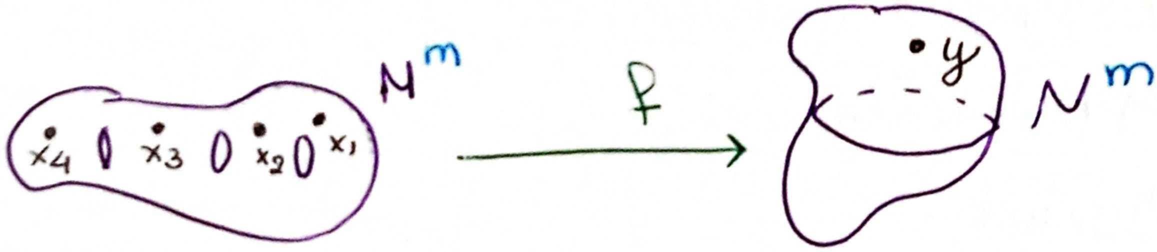
ΑΠΟΔΕΙΞΗ
(ΑΣΚΗΣΗ ΣΕ ΦΥΛΛΑΔΙΟ)

Το δεύτερο πράγμα που πρέπει να δούμε είναι τι συμβαίνει για απεικονίσεις μεταξύ ισοδιάστατων πολυπτυγμάτων, δηλαδή απεικονίσεις $f: M \to N$ με $\dim M = \dim N$

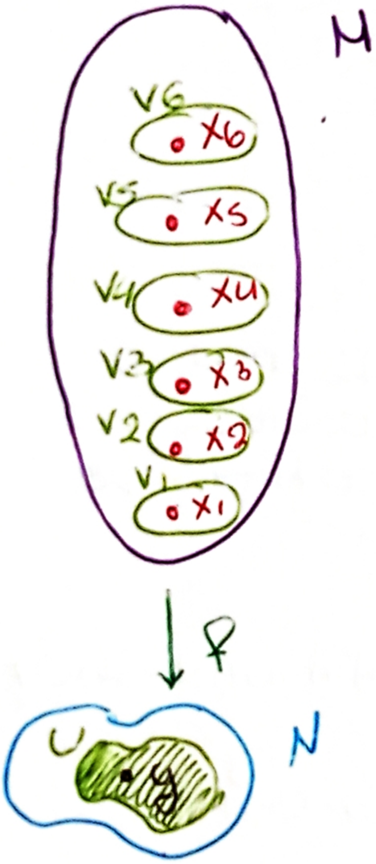
ΘΕΩΡΗΜΑ
Ας υποθέσουμε ότι $f: M \to N$ διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ ισοδιάστατων πολυπτυγμάτων.
Επίσης ας υποθέσουμε ότι το M είναι συμπαγές.

Έστω $y \in N$ μια κανονική τιμή της f. Τότε

i) Το σύνολο $f^{-1}(y)$ είναι διακριτό (πεπερασμένο) υποσύνολο του M ($\exists$ σημεία $x_1, \dots, x_m \in M$ με $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$



ii) Υπάρχει ανοικτή περιοχή U του N γύρω από το y, ούτως ώστε το $f^{-1}(U)$ να γράφεται ως ξένη ένωση $V_1 \cup \dots \cup V_n$ ανοικτών υποσυνόλων του M με $x_i \in V_i$ και $f: V_i \to U$ είναι διαφορομορφισμός.



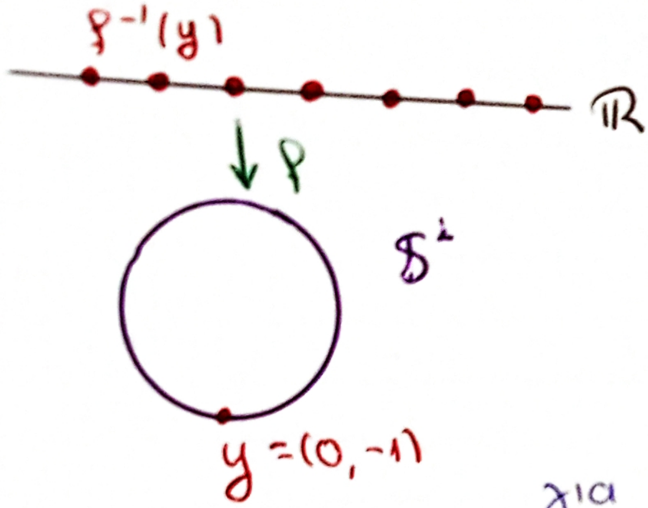
Αποδειξη (Ασκηση σε Φυλλαδιο)

Σημείωση

Το ότι έχουμε πεπερασμένο πλήθος σημείων $x_1, \dots, x_n$ στο παραπάνω θεώρημα, οφείλεται στη συμπάγεια του M^m. Χωρίς τη συμπάγεια το αποτέλεσμα δεν ισχύει.

Παράδειγμα

$f:\mathbb{R}\to S^1$ με τύπο $f(x) = (\cos x, \sin x)$



για $\cos x = 0$ και $\sin x = -1$

$$f^{-1}(y) = \{ x \in \mathbb{R} : \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

"άπειρα σημεία"

Ορισμός

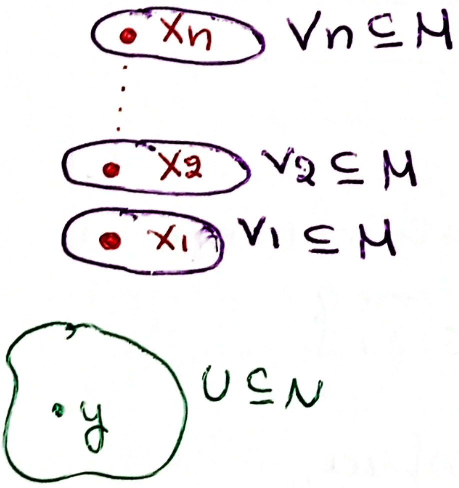
Έστω $f: M \to N$, M συμπαγές πολύπτυγμα, διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ ισοδιάστατων πολυπτυγμάτων. Έστω $y \in N$ κανονική τιμή της f. Συμβολίζουμε με $\# f^{-1}(y) \equiv$ πλήθος των στοιχείων του συνόλου $f^{-1}(y)$.

Θεώρημα

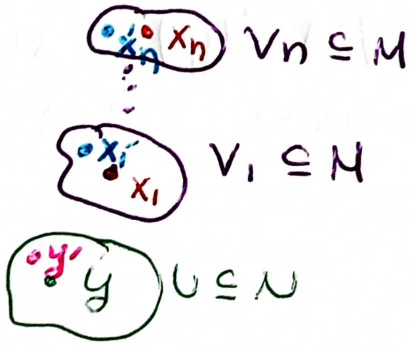
Έστω $f: M \to N$ διαφορίσιμη, μεταξύ ισοδιάστατων πολυπτυγμάτων, όπου M είναι συμπαγές.
Ας συμβολίσουμε με R το σύνολο των κανονικών τιμών της f. Τότε, η απεικόνιση
$R \ni y \longrightarrow \# f^{-1}(y)$ είναι τοπικά σταθερή.

Απόδειξη

Έστω $y \in R$. Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα, υπάρχουν $\{x_1, \dots, x_n\}$ στο M έτσι ώστε
$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$



Επίσης, υπάρχουν περιοχές $V_1, \dots, V_n$ γύρω από τα σημεία $x_1, \dots, x_n$ που είναι ξένα ανά δύο και περιοχή U γύρω από το y, έτσι ώστε ο περιορισμός της $f: V_i \to U$ να είναι διαφορομορφισμός.



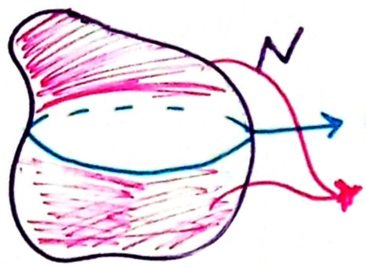
Άρα $\forall y' \in U$, $\exists$ μοναδικό $x_i' \in V_i$ με $f(x_i') = y'$.

Οπότε, $\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Δεν μπορούμε να πούμε ότι η απεικόνιση

$R \ni y \longrightarrow \# f^{-1}(y)$ είναι σταθερή, διότι δε γνωρίζουμε αν το σύνολο R είναι συνεκτικό.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε μιγαδικό πολυώνυμο βαθμού-n έχει ακριβώς n-ρίζες

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η απόδειξη που θα δώσουμε οφείλεται στον J. Milnor

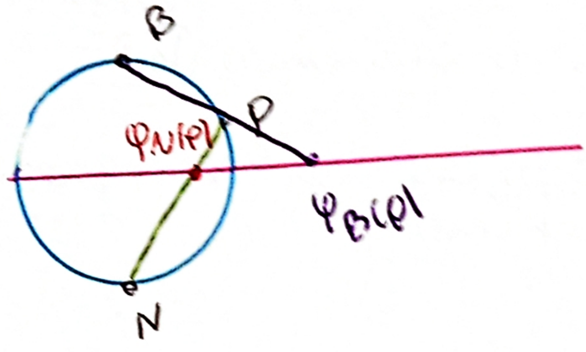
2. Η ιδέα είναι να επεκτείνουμε την πολυωνυμική συνάρτηση

$\varphi(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ από απεικόνιση $F: S^2 \to S^2$ και να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που αναφέραμε παραπάνω.

Αποδειξη

Βημα Δ

Η επέκταση θα γίνει μέσω στερεογραφικών προβολών



Έχουμε δει ότι

$$\varphi_B \circ \varphi_N^{-1}(x_1, x_2) = \frac{(x_1, x_2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\varphi_N \circ \varphi_B^{-1}(x_1, x_2) = \frac{(x_1, x_2)}{(x_1^2 + x_2^2)}$$

Μπορούμε να ταυτίσουμε τον $\mathbb{R}^2$ με το $\mathbb{C}$ μέσω της απεικόνισης $(x_1, x_2) \to z = x_1 + i x_2$. Με αυτή την ταύτιση, βλέπουμε ότι

$$\varphi_B \circ \varphi_N^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

$$\varphi_N \circ \varphi_B^{-1}(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Η επέκταση, που λέγαμε, είναι η $F: S^2 \to S^2$ με τύπο $F(Q)=\begin{cases} \varphi_B^{-1}\circ p\circ\varphi_B(Q), & Q\in S^2\setminus\{B\} \\ (0,0,1), & Q=(0,0,1) \end{cases}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1 Η F είναι λεία.

Πράγματι, Αρκεί ν.δ.ο. είναι λεία στο (0, 0, 1)

προς , θα συνθέσουμε με το χάρτη

φ_N και θα θεωρήσουμε την $Q: \mathbb{C}=\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$

με τύπο $Q(z)=\varphi_N\circ F\circ\varphi_N^{-1}=\varphi_N\circ\varphi_B^{-1}\circ p\circ\varphi_B\circ\varphi_N^{-1}$

Έχουμε $Q(z)=\varphi_N\circ\varphi_B^{-1}\circ p\circ\varphi_B\circ\varphi_N^{-1}(z)=$

$\varphi_N\circ\varphi_B^{-1}\circ p(1/\bar{z})=$

$\varphi_N\circ\varphi_B^{-1}(a_n\bar{z}^{-n}+\dots+a_1\bar{z}+a_0)=$

$$\frac{1}{\bar{a}_n z^{-n}+\dots+a_1 z^{-1}+a_0}=\frac{z^n}{\bar{a}_n+\bar{a}_{n-1}z+\dots+az^{n-1}+a_0z^n}$$

Επειδή $Q(0)=\frac{1}{\bar{a}_n}\neq 0 \Rightarrow$

Q διαφορίσιμη στο $0 \Rightarrow F$ είναι διαφορίσιμη.

Άρα το πολυώνυμο P επεκτάθηκε σε

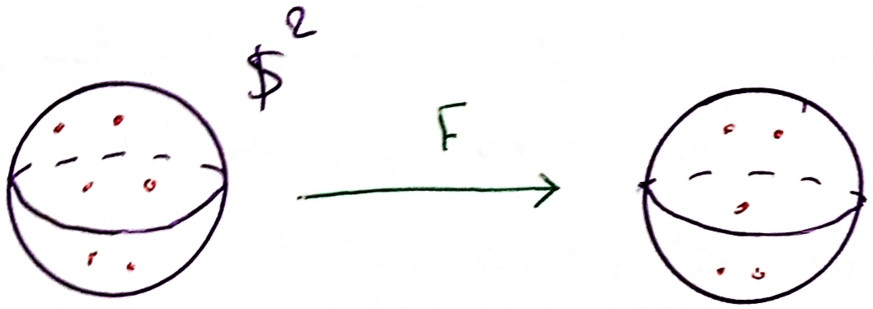
απεικόνιση διαφορίσιμη από $S^2\to S^2$

ΒΗΜΑ 2

Η $F: S^2\to S^2$ έχει πεπερασμένο πλήθος

κρίσιμων σημείων.

Τα κρίσιμα σημεία της F είναι σημεία όπου το διαφορικό του πολυωνύμου f μηδενίζεται. Όμως, $dP_z = p'(z) = \sum_{j=1}^{n} j a_j z^{j-1}$ το οποίο είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $j-1$. Άρα έχει το πολύ $j-1$ ρίζες. Άρα είναι πεπερασμένες.



κρίσιμες τιμές είναι πεπερασμένες.

Άρα το σύνολο των κανονικών τιμών της F είναι $R = S^2 \setminus \{\text{πεπερασμένα σημεία}\} \equiv$ συνεκτικό σύνολο

ΒΗΜΑ 3

Η $F: S^2 \to S^2$ είναι επί.

Είδαμε ότι το σύνολο R είναι συνεκτικό. Επομένως, η συνάρτηση $R \ni y \to \# f^{-1}(y) \in \mathbb{Z}$ είναι σταθερή. Υποθέτουμε, τώρα ότι η F δεν είναι επί. Αυτό σημαίνει ότι $\exists y_0 \in S^2$ με $f^{-1}(y_0) = \emptyset$. Άρα $\# f^{-1}(y_0) = 0$. Τότε, όμως θα έχουμε ότι $\# f^{-1}(y) = 0 \ \forall y \in S^2$. Αλλά τότε η F σταθερή. Άτοπο, διότι τότε θα έπρεπε το πολυώνυμο να είναι σταθερό

Βήμα 4

Επειδή η F είναι επί, $\exists$ τουλάχιστον ένα σημείο $p \in S^2$ με $F(p) = (0, 0, -1)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το γεγονός

σημείο όπου το πολυώνυμο μηδενίζεται.

Οπότε, το P έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Άρα $P(z) = (z - z_0)(b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0)$.

Κάνοντας, την ίδια διαδικασία τουλάχιστον

n-φορές $\Rightarrow$ $p(z) = a\underbrace{(z - z_1)}_{\text{ρίζα}}\underbrace{(z - z_2)}_{\text{ρίζα}} \dots \underbrace{(z - z_n)}_{\text{ρίζα}}$